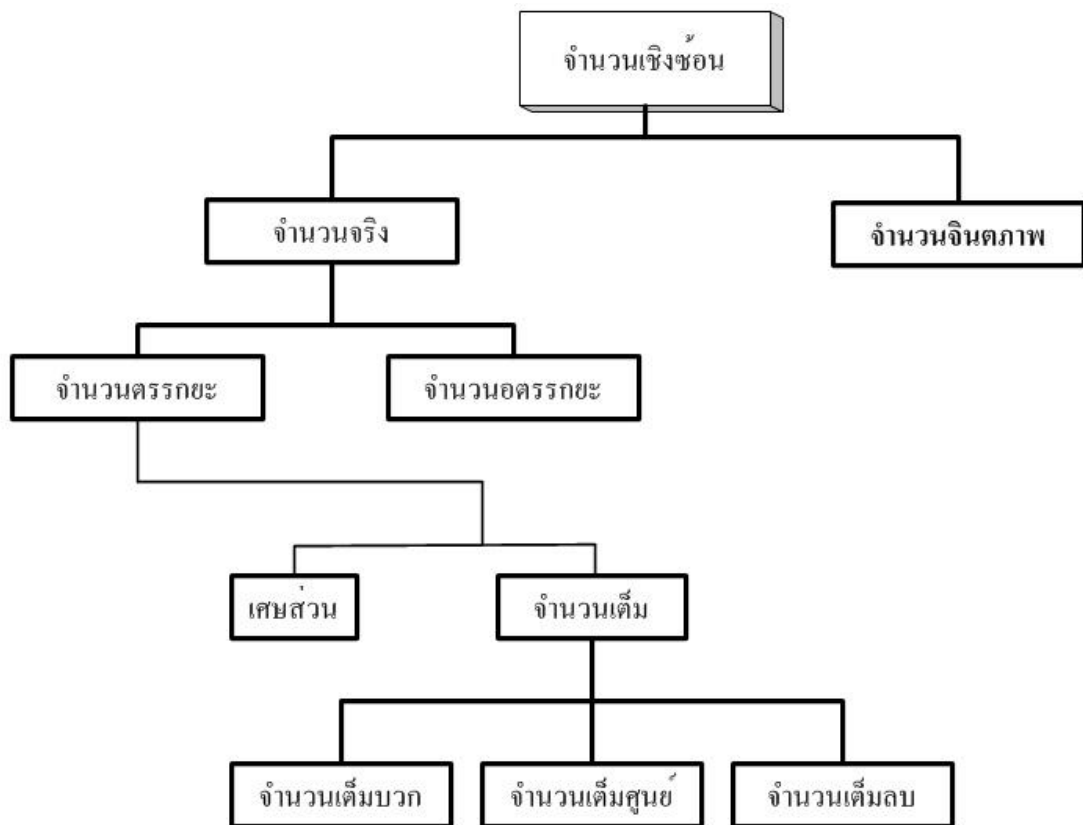


จำนวนเชิงซ้อน(Complex Number)

ในระบบของเลขจำนวนนั้น ประกอบด้วยตัวเลขจำนวนต่างๆ หลายชนิด โดยแต่ละชนิดของเลขจำนวนมีลักษณะต่างกันไป สามารถแสดงได้ดังรูป



จำนวนเชิงซ้อน ประกอบด้วย จำนวนจริง และจำนวนจินตภาพ

1.จำนวนจริง สามารถแบ่งได้ 2 ชนิดคือ

1.1จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถหาค่าได้แน่นอน โดยจะเป็นทศนิยมที่ไม่รู้จบ และมีตัวเลขไม่ซ้ำกันเลย เช่น $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ หรือ π เป็นต้น

1.2 จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถหาค่าได้แน่นอน ซึ่งอาจอยู่ในรูปทศนิยมที่มีตัวเลขซ้ำกัน เศษส่วน หรือ จำนวนเต็ม

- เศษส่วน
- จำนวนเต็ม คือจำนวนนับ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ชนิดคือ
 - จำนวนเต็มบวก คือ จำนวนที่มีค่าเป็นบวก เช่น 1 , 2 , 3 , 4 เป็นต้น
 - จำนวนเต็มศูนย์ คือ 0 ซึ่งเป็นจำนวนที่ไม่มีค่า
 - จำนวนเต็มลบ คือ จำนวนนับที่มีค่าเป็นลบ เช่น -1 , -2 , -3 และ -4 เป็นต้น

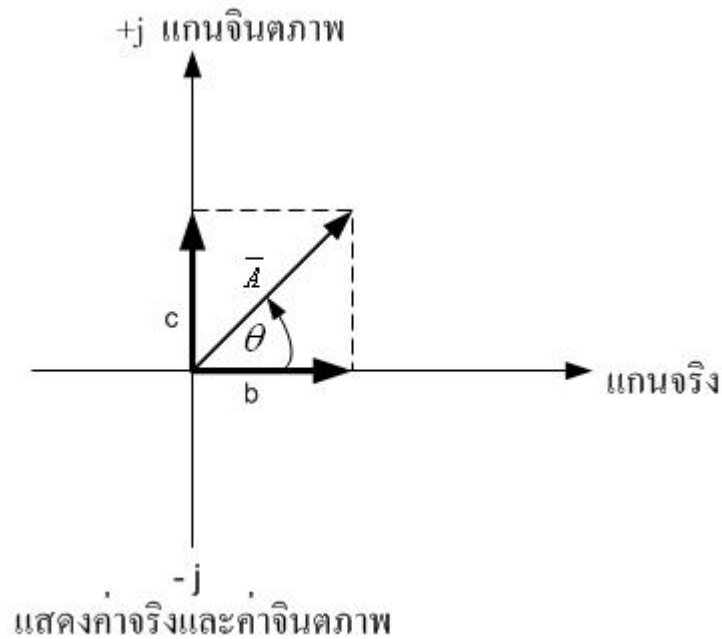
2.จำนวนจินตภาพ

คือ จำนวนจริงใดๆ ที่เป็นจำนวนลบ และอยู่ภายใต้เครื่องหมายรากที่สอง เช่น $\sqrt{-2}, \sqrt{-7}, \sqrt{-60}$ ซึ่งสามารถใช้สัญลักษณ์ j แทนจำนวนจินตภาพได้ดังนี้

$$j = \sqrt{-1}$$

ในการเขียนอธิบายค่าต่างๆในวงจรไฟฟ้า โดยเฉพาะวงจรไฟฟ้า กระแสสลับการเขียนเฟสเซอร์ในรูปแบบเชิงขั้วและแบบมุมฉาก

ในการเขียนเฟสเซอร์ หรือ เวกเตอร์ จะให้แกนนอนเป็นค่าจำนวนจริง (Real) และ แกนตั้งเป็นค่าจินตภาพ (Imaginary) โดยใช้ อักษร j แสดงค่าจินตภาพ (j มีใช้ตัวเลขแต่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง) ดังรูป



จากรูป เขียนเฟสเซอร์ \bar{A} ได้ในรูปแบบมุมฉากตามสมการ

$$\bar{A} = b + jc$$

โดย j มีค่าดังนี้

$$j = \sqrt{-1} \quad \text{หรือ} \quad j^2 = -1$$

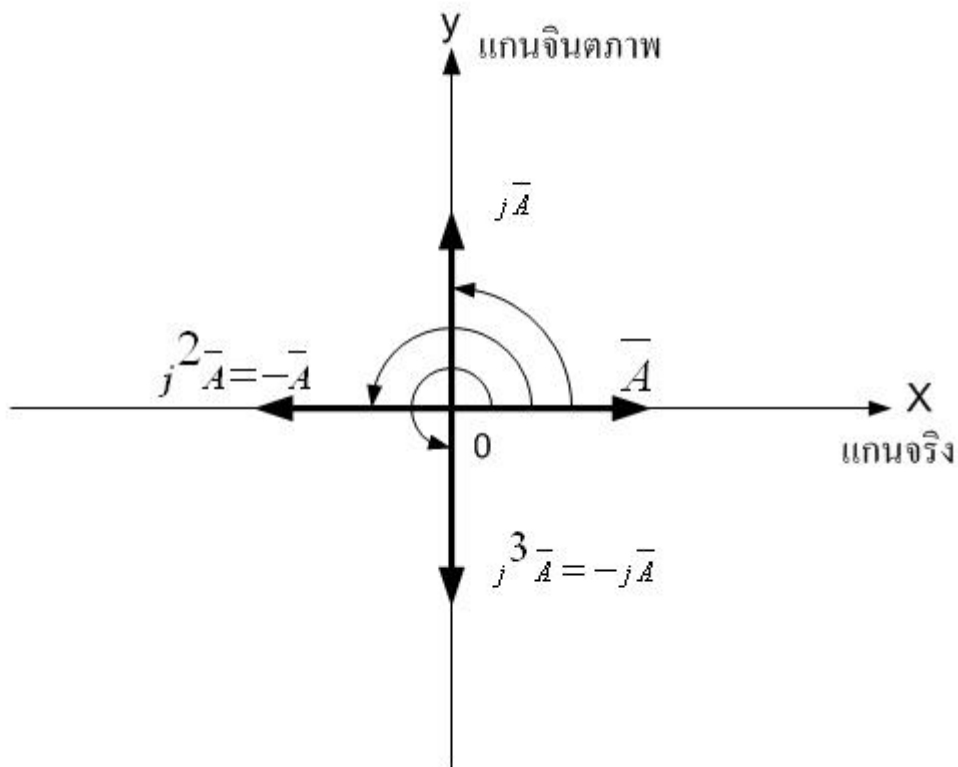
หรือ อีกมุมหนึ่ง j เป็นสัญลักษณ์ที่แสดงว่าเฟสเซอร์หรือ เวกเตอร์ได้ หมุนไปจากแกนอ้างอิง 90°

ถ้าหมุนไป 180° ก็จะได้ j^2 หรือ -1

ถ้าหมุนไป 270° จะได้ j^3 หรือ $-j$

และถ้าหมุนครบ 1 รอบ หรือ 360° จะได้ j^4 หรือ $(-1)^2$

หรือ 1 นั้นเอง



รูป แสดงการหมุนเฟสเซอร์

จำนวนเชิงซ้อน สามารถเขียน ได้ 4 รูปแบบคือ

1. เรคแทงกูลาร์ฟอร์ม (Rectangular Form)
2. โพลาร์ฟอร์ม (Polar Form)
3. ตรีโกณมิติรูปฟอร์ม (Trigonometry Form)
4. เอกซ์โพเนนเชียลฟอร์ม (Exponential Form)

เรคแทงกูลาร์ฟอร์ม (Rectangular Form)

มีรูปแบบทั่วไปคือ

$$\mathbf{x + jy}$$

เมื่อ x คือ จำนวนจริง (Real Number)

jy คือ จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)

เช่น

$$3 + j5, \quad 5 - j4, \quad -2 + j3, \quad -5 - j8$$

โพลาร์ฟอร์ม(Polar Form)

มีรูปทั่วไปคือ

$$r \angle \theta$$

เมื่อ r คือ ขนาด

θ คือ มุมของขนาด (องศา)

เช่น $3 \angle 30^\circ$, $35 \angle -60^\circ$

ตรีโกณมิติรูปฟอร์ม(Trigonometry Form)

มีรูปแบบทั่วไปคือ

$$r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

ตัวอย่างเช่น

$$4(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$$

$$3(\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ)$$

การเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเปลี่ยนจากรูปหนึ่งไปเป็นรูปหนึ่งได้ เช่น

| | | |
|-------------------|--------|----------------|
| เรคแทงกูลาร์ฟอร์ม | -----> | โพลาร์ฟอร์ม |
| โพลาร์ฟอร์ม | -----> | ตรีโกณเมทริกซ์ |

1. การเปลี่ยนรูปเรคแทงกูลาร์ฟอร์มไปเป็นโพลาร์ฟอร์ม

จากรูปทั่วไป ของ โพลาร์ฟอร์ม คือ $r \angle \theta$

ดังนั้น

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ หรือ } \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ตัวอย่างที่ 1

จงเปลี่ยน $2 + j2$ เป็นโพลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

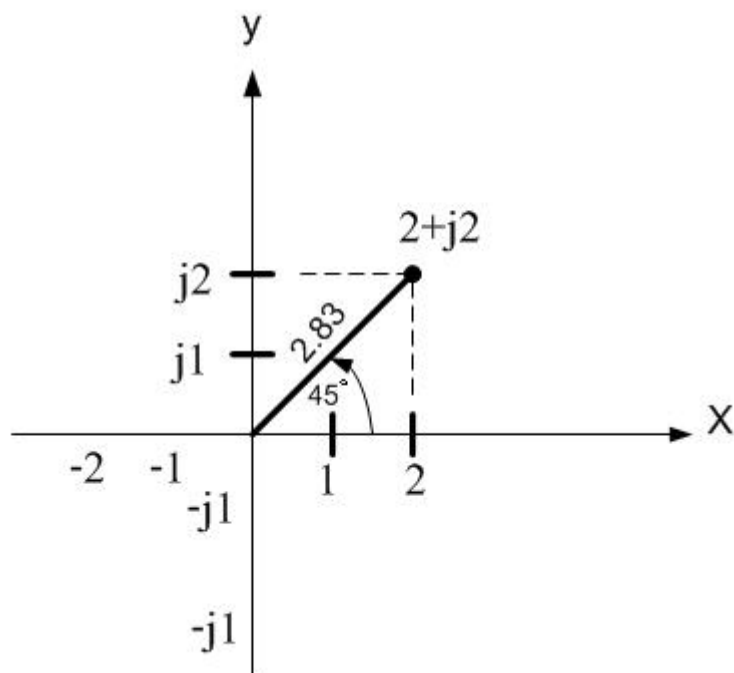
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$= 2.83$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{2}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore 2 + j2 = 2.83 \angle 45^\circ$$



ตัวอย่างที่ 2

จงเปลี่ยน $-20 - j40$

วิธีทำ

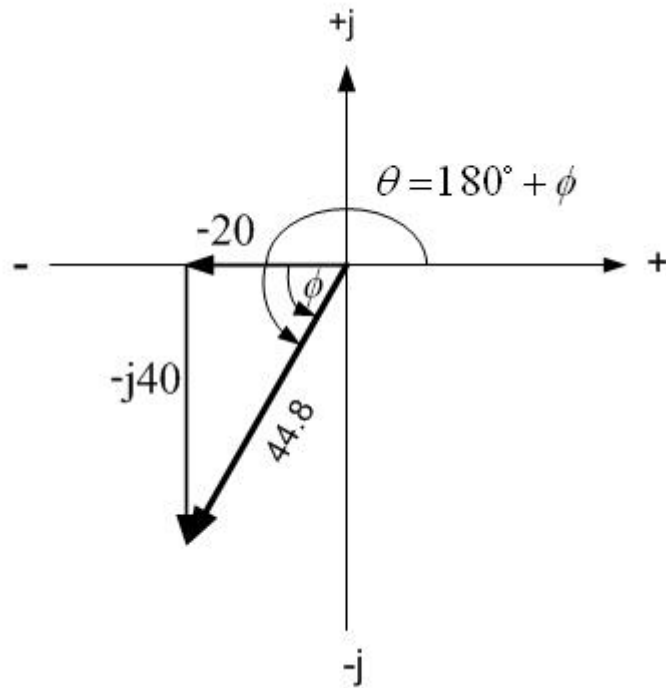
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-20)^2 + (-40)^2} = \sqrt{2000} = 44.8$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{-40}{-20} = \tan^{-1} 2 = 63.4^\circ$$

$$\theta = \phi + 180^\circ = 63.4^\circ + 180^\circ = 243.4^\circ$$

$$\therefore -20 - j40 = 44.8 \angle 243.4^\circ$$



ตัวอย่างที่ 3

จงเปลี่ยน $4 - j3$ ให้อยู่ในรูป โพลาร์ฟอร์ม

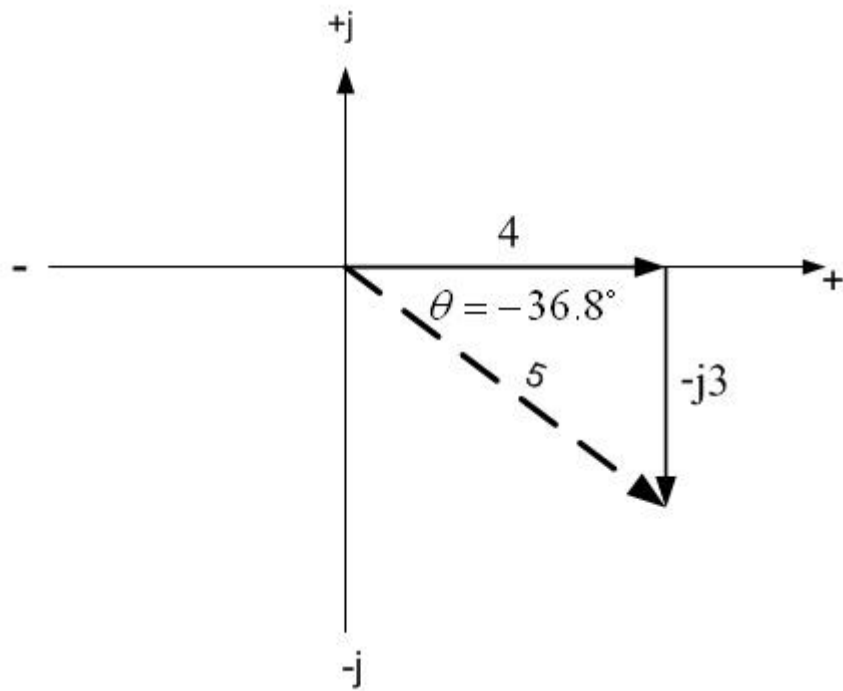
วิธีทำ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right) = -36.8^\circ$$

$$\therefore 4 - j3 = 5 \angle -36.8^\circ$$



ในการหามุม θ ต้องคำนึงด้วยว่า ค่าของ x และ y อยู่ใน Quadrant ไต

การเปลี่ยนรูป โพลาร์ฟอร์ม เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

จากรูปทั่วไป ของ เรคแทงกูลาร์ฟอร์ม คือ $x + jy$ ดังนั้น

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ตัวอย่างที่ 4

จงเปลี่ยน $4 \angle 60^\circ$ เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ &= 4 \cos 60^\circ \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r \sin \theta \\ &= 4 \sin 60^\circ \\ &= 3.464 \end{aligned}$$

$$\therefore 4 \angle 60^\circ = 2 + j3.464$$

ตัวอย่างที่ 5

จงเปลี่ยน $\bar{A} = 1.2 \angle -152^\circ$ ให้เป็นรูปแบบเรคแทงกูลาร์

วิธีทำ

$$\bar{A} = 1.2 \angle -152^\circ$$

$$\begin{aligned}\text{แทนค่า } \bar{A} &= 1.2 \cos(-152^\circ) + j1.2 \sin(-152^\circ) \\ &= -1.2 \cos 28^\circ - j1.2 \sin 28^\circ \\ &= (-1.06) - j0.564\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6

จงเปลี่ยนเฟสเซอร์ $\bar{A} = 10 \angle -30^\circ$ ให้อยู่ในรูป

เรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

จากสมการ $-A \angle \theta = A \angle \theta + 180^\circ$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } -\bar{A} &= -10 \angle -30^\circ \\ &= 10 \angle 150^\circ \\ &= 10 \cos 150^\circ + j 10 \sin 150^\circ \\ &= -10 \cos 30^\circ + j \sin 30^\circ \\ &= (-8.66) + j5 \\ \bar{A} &= 8.66 - j5 \quad (\text{คอนจูเกต})\end{aligned}$$

ในการแปลงจากรูปแบบโพลาร์ เป็นเรคแทงกูลาร์ต้องดูว่ามุมอยู่ใน Quadrant ไต ด้วย

เช่น ตัวอย่างที่ 5 ค่าของ x และ y อยู่ใน Quadrant ลบ ดังนั้น จึง ได้เป็น

$$-1.2 \cos 28^\circ - j1.2 \sin 28^\circ$$

ส่วนมุม ที่มากกว่า 90° ต้องนำมาลบด้วย 180°

เช่น ตัวอย่างที่ 5 มุม 152° ได้เป็นค่ามุม

$$180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$$

แต่ถ้ามีเครื่องคำนวณที่สามารถหาค่ามุม \cos และ \sin ได้ก็สามารถแปลงได้โดยกดหาค่ามุม $-\cos$ และ $-\sin$ ก็ได้คำตอบเช่นเดียวกัน จาก

$$\text{ตัวอย่างที่ 5 } \bar{A} = 1.2 \angle -152^\circ$$

$$x = 1.2 \cos (-152^\circ)$$

$$= 1.2(-0.882)$$

$$= -1.059$$

$$y = 1.2 \sin (-152^\circ)$$

$$= 1.2 (-0.469)$$

$$= -0.56$$

การเปลี่ยนรูป ระหว่างโพลาร์ฟอร์มและ ตรีโกณเมทริกซ์ฟอร์ม
ทำได้เนื่องจากว่าค่า r และ θ จะถูกใช้ร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 7

จงเปลี่ยน $5 \angle 60^\circ$ เป็นตรีโกณเมทริกซ์

วิธีทำ

$$5 \angle 60^\circ = 5 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$$

ตัวอย่างที่ 8

จงเปลี่ยน $2 \angle -45^\circ$ เป็นตรีโกณเมทริกซ์

วิธีทำ

$$2 \angle -45^\circ = 2 (\cos -45^\circ + j \sin -45^\circ)$$

ตัวอย่างที่ 9

จงเปลี่ยน $2(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$ เป็นโพลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

$$2(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 2 \angle 30^\circ$$

ตัวอย่างที่ 10

จงเปลี่ยน $5(\cos -60^\circ + j \sin 60^\circ)$ เป็นโพลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

$$5(\cos -60^\circ + j \sin 60^\circ) = 5 \angle -60^\circ$$

ตัวอย่างที่ 11

จงเปลี่ยน $3(\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ)$ เป็นโพลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

ต้องจัดให้อยู่ในรูป $r(\cos \theta + j \sin \theta)$ ก่อน

$$\begin{aligned} 3(\cos -60^\circ + j \sin 60^\circ) &= 3(\cos -60^\circ + j \sin -60^\circ) \\ &= 3 \angle -60^\circ \end{aligned}$$

การเปลี่ยน รูปจากเรคแทงกูลาร์ฟอร์มเป็นตรีโกณเมทริกซ์ทำได้ง่าย
เพียงแต่คำนวณหาค่าจากรูปของตรีโกณเมทริกซ์ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 12

จงเปลี่ยน $2(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)$ เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) &= 2(0.707 + j 0.707) \\ &= 1.414 + j1.414 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 13

จงเปลี่ยน $3(\cos -60^\circ + j \sin -60^\circ)$ เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3(\cos -60^\circ + j \sin -60^\circ) &= 3(0.5 - j 0.866) \\ &= 1.5 - j2.598 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบโพลาร์ฟอร์ม พร้อมทั้งหาคอนจูเกต

1.1 $3 + j4$

1.2 $(-6) + j8$

1.3 $10 - j17.32$

1.4 $(-20) - j20$

1.5 $(-4) + j10$

2. จงเปลี่ยนรูปโพลาร์ฟอร์มต่อไปนี้ให้เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

2.1 $32 \angle -33^\circ$

2.2 $1.2 \angle 45^\circ$

2.3 $22 \angle 120^\circ$

2.4 $15.6 \angle -190^\circ$

2.5 $28.3 \angle -135^\circ$

2.6 $0.5 \angle 70^\circ$

2.7 $80 \angle -150^\circ$

2.8 $100 \angle 5^\circ$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบโพลาร์ฟอร์ม พร้อมทั้งหาคอนจูเกต

1.1 $3 + j4$ $(5 \angle 53.1^\circ, 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ)$

1.2 $(-6) + j8$ $(10 \angle 126.87^\circ, (-6) - j8 = 10 \angle -126.9^\circ)$

1.3 $10 - j17.32$ $(20 \angle -60^\circ, 10 + j17.32 = 20 \angle 60^\circ)$

1.4 $(-20) - j20$ $(28.28 \angle -135^\circ, (-20) + j20 = 28.28 \angle 135^\circ)$

1.5 $(-4) + j10$ $(10.77 \angle 111.8^\circ, (-4) - j10 = 10.77 \angle -111.8^\circ)$

2. จงเปลี่ยนรูปโพลาร์ฟอร์มต่อไปนี้ให้เป็นเรคแทงกูลาร์ฟอร์ม

2.1 $32 \angle -33^\circ$ $(26.8 - j17.4)$

2.2 $1.2 \angle 45^\circ$ $(0.849 + j0.849)$

2.3 $22 \angle 120^\circ$ $(-11 + j19.1)$

2.4 $15.6 \angle -190^\circ$ $(-15.4 + j2.71)$

2.5 $28.3 \angle -135^\circ$ $(-20 - j20)$

2.6 $0.5 \angle 70^\circ$ $(0.171 + j0.47)$

2.7 $80 \angle -150^\circ$ $(-69.3 - j40)$

2.8 $100 \angle 5^\circ$ $(99.6 + j8.72)$

เอกสารอ้างอิง

วิชาญ ก่องดาวงษ์ : วิเคราะห์วงจรไฟฟ้า , ซีเอ็ดยูเคชั่น
จำกัด ,กรุงเทพฯ,2537

รวิวรรณ หุตั้งคบดีและคณะ : คณิตศาสตร์ประยุกต์7,ศูนย์
ส่งเสริมอาชีพ,กรุงเทพฯ,2547